

УДК 517.958

О РАЗРЕШИМОСТИ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ОСОБЕННОСТЯМИ ПО НЕСКОЛЬКИМ ПЕРЕМЕННЫМ

© А.Ю.Сазонов, Ю.Г.Фомичева

Ключевые слова: оператор Бесселя, гиперболический оператор, параболический оператор, сингулярный оператор.

В работе рассматриваются смешанные задачи для параболических и гиперболических уравнений второго порядка с переменными коэффициентами, в которых по части пространственных переменных действует сингулярный дифференциальный оператор Бесселя. Задачи исследуются классическим методом разделения переменных. Приводятся достаточные условия на границу области, коэффициенты уравнения, начальные функции и правую часть уравнения, при которых ряд Фурье удовлетворяет в классическом смысле всем условиям задачи и является классическим решением. Устанавливается единственность решения данных задач.

Пусть $\mathbb{R}_+^{n+m} = \{(x, y) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}_+^{n+m} : y_i > 0, i = \overline{1, m}\}$; Ω^+ - область в пространстве $\mathbb{R}_+^{n+m}$, ограниченная гиперплоскостями $\Gamma_i^0 : y_i = 0, (i = 1, 2, \dots, m)$, и произвольной поверхностью типа Ляпунова Γ .

В цилиндре $Q_T = \Omega^+ \times [0, T]$ рассматривается смешанная краевая задача

$$\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial t^2} - Pu(x, y, t) = f(x, y), \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x, y), \quad u|_{\Gamma \times [0, T]} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y_i} \Big|_{\Gamma_i^0 \times [0, T]} = 0, \quad (2)$$

где

$$P = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[a_{ij}(x, y) \frac{\partial}{\partial x_j} \right] + \sum_{i=1}^m b_i(x) B_{y_i} + c(x, y) \quad (3)$$

– оператор B -эллиптического типа [1];

$$B_{y_i} = \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} + \frac{k_i}{y_i} \frac{\partial}{\partial y_i} \text{ – оператор Бесселя; } k_i \geq 0, c(x, y) \leq 0;$$

$\varphi(x, y), \psi(x, y), f(x, y, t)$ – заданные функции, $(x, y) \in \Omega^+, t \in [0, T]$.

В [3] и [5] задача (1)–(2) рассмотрена при $m = 1$.

Общее решение задачи (1) – (2) представимо рядом Фурье

$$u(x, y, t) = \sum_{p=1}^{\infty} v_p(x, y) \left[\varphi_p \cos \sqrt{\lambda_p} t + \frac{\psi_p}{\sqrt{\lambda_p}} \sin \sqrt{\lambda_p} t + \frac{1}{\sqrt{\lambda_p}} \int_0^t f_p(\tau) \sin \sqrt{\lambda_p} (t - \tau) d\tau \right], \quad (4)$$

где $v_p(x, y)$ – собственные функции, а λ_p – соответствующие собственные значения краевой задачи

$$Pv(x, y) + \lambda v(x, y) = 0, \quad v(x, y)|_{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial v(x, y)}{\partial y_i} \Big|_{\Gamma_i^0} = 0, \quad (x, y) \in \Omega^+, i = \overline{1, m}, \quad (5)$$

φ_p , ψ_p и $f_p(\tau)$ ($p=1, 2, \dots$) – коэффициенты Фурье разложения функций $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ и $f(x, y, t)$ в ряд по системе собственных функций $\{v_p(x, y)\}$.

Т е о р е м а 1. Пусть коэффициенты оператора P и функции $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$, $f(x, y, t)$ удовлетворяют условиям:

- 1) в замкнутой области $\overline{\Omega^+}$ функции $a_{ij}(x, y)$ имеют непрерывные производные до порядка $k+2$, а функции $b_i(x)$ и $c(x, y)$ – до порядка $k+1$, где $k = \left\lfloor \frac{n+m+k_1+\dots+k_m}{2} \right\rfloor$ – целая часть числа $\frac{n+m+k_1+\dots+k_m}{2}$;
- 2) $\varphi \in H_{k_1, \dots, k_m}^{k+3}(\Omega^+)$, $\psi \in H_{k_1, \dots, k_m}^{k+2}(\Omega^+)$ и, кроме того, $\varphi, P\varphi, \dots, P^l\varphi, \psi, P\psi, \dots, P^r\psi$ принадлежат пространству $H_{k_1, \dots, k_m}^1(\Omega^+)$, где $H_{k_1, \dots, k_m}^1(\Omega^+)$, $H_{k_1, \dots, k_m}^l(\Omega^+)$ – весовые функциональные пространства И.А. Киприянова, определенные в [2]; $l = \left\lfloor \frac{n+m+k_1+\dots+k_m+4}{4} \right\rfloor$, $r = \left\lfloor \frac{n+m+k_1+\dots+k_m+2}{4} \right\rfloor$;
- 3) $f \in H_{k_1, \dots, k_m}^{k+2}(Q_T)$ и, кроме того, функции $f, Pf, \dots, P^rf$ принадлежат пространству $H_{k_1, \dots, k_m}^1(Q_T)$.

Тогда ряд (4) и ряды, полученные однократным и двукратным почленным дифференцированием по t ряда (4), сходятся равномерно во всем замкнутом цилиндре Q_T , а ряды $\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x_i}$, $\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x_i \partial x_j}$, $B_{y_i}u(x, y, t)$, полученные однократным и двукратным почленным дифференцированием ряда (4) по x_i , сходятся равномерно в любой внутренней подобласти цилиндра Q_T . При этом сумма ряда (4) определяет классическое решение задачи (1)–(2).

Т е о р е м а 2. Если область Ω^+ и коэффициенты оператора P допускают существование полной ортонормированной системы классических собственных функций краевой задачи (5), то смешанная задача (1)–(2) имеет только одно классическое решение.

Аналогично рассматривается смешанная задача для сингулярного параболического уравнения.

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} - Pu(x, y, t) = f(x, y, t), \quad (6)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x, y), u|_{\Gamma \times [0, T]} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y_i} \Big|_{\Gamma_i^0 \times [0, T]} = 0, i = \overline{1, m}. \quad (7)$$

В случае $m=1$ такая задача рассмотрена в [4].

Общее решение задачи (6)–(7) представимо рядом Фурье

$$u(x, y, t) = \sum_{p=1}^{\infty} v_p(x, y) \left[\varphi_p e^{-\lambda_p t} + \int_0^t f_p(\tau) e^{-\lambda_p(t-\tau)} d\tau \right], \quad (8)$$

где $v_p(x, y)$ – собственные функции, а λ_p – соответствующие собственные значения краевой задачи (5); φ_p и $f_p(\tau)$ – коэффициенты Фурье разложения функций $\varphi(x, y)$ и $f(x, y, t)$ по системе $\{v_p(x, y)\}$.

Т е о р е м а 3. Если функции $\varphi(x, y)$ и $f(x, y, t)$ удовлетворяют условиям:

- 1) $\varphi \in H_{k_1, \dots, k_m}^{\left\lfloor \frac{n+m+k_1+\dots+k_m}{2} \right\rfloor + 2}(\Omega^+)$ и, кроме того, $\varphi, P\varphi, \dots, P^{\left\lfloor \frac{n+m+k_1+\dots+k_m}{4} \right\rfloor} \varphi$ принадлежат пространству $H_{k_1, \dots, k_m}^1(\Omega^+)$,
- 2) $f \in H_{k_1, \dots, k_m}^{\left\lfloor \frac{n+m+k_1+\dots+k_m}{2} \right\rfloor + 2}(Q_T)$ и, кроме того, $f, Pf, \dots, P^{\left\lfloor \frac{n+m+k_1+\dots+k_m+2}{4} \right\rfloor} f$ принадлежат пространству $H_{k_1, \dots, k_m}^1(Q_T)$.

Тогда ряд (8) и ряд $\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t}$, полученный дифференцированием по t ряда (8), равномерно сходятся во всем замкнутом цилиндре Q_T .

Ряды $\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial x_i}$, $\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x_i \partial x_j}$, $B_{y_i} u(x,y,t)$, полученные однократным и двукратным дифференцированием ряда (8), сходятся равномерно в любой строго внутренней подобласти цилиндра Q_T .

При этом сумма ряда (8) определяет классическое решение задачи (6) – (7).

ЛИТЕРАТУРА

1. Киприянов И.А. О краевых задачах для уравнений в частных производных с дифференциальным оператором Бесселя // ДАН СССР. 1964. Т. 158. № 2.
2. Киприянов И.А. Сингулярные эллиптические краевые задачи. М.: Наука, 1997.
3. А.Ю. Сазонов О методе Фурье для некоторых сингулярных гиперболических уравнений. ДАН СССР. 1979. Т. 248. № 4.
4. А.Ю. Сазонов О классическом решении смешанной задачи для сингулярного параболического уравнения. Дифференциальные уравнения. 1990. Т. 26. № 8.
5. Катрахова А.А., Сазонов А.Ю., Фомичева Ю.Г. О существовании и единственности классического решения смешанной задачи для сингулярного гиперболического уравнения, содержащего оператор Бесселя.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 11-01-00626)

Sazonov A.Yu., Fomicheva Yu.G. ON SOLVABILITY OF MIXED PROBLEMS FOR PARABOLIC AND HYPERBOLIC EQUATIONS WHICH HAVE SINGULARITIES ON SEVERAL VARIABLES

In the resent work mixed problems for parabolic and hyperbolic equations of a second-kind with variable coefficients, where a singular differential Bessel operator acts on a spatial variables, are considered. Problems are investigated by the classical method of a variables separation of. A sufficient conditions on the area boundary, the equation factors, the initial functions and the equation right term at which the Fourier series satisfies in classical sense to all conditions of the problem and represents it's classical solution. Uniqueness of a solution to the given problems is established.

Keywords: Bessel operator; hyperbolic operator; parabolic operator; singular operator.

УДК 512.18

ОКРЕСТНОСТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МУЛЬТИАГЕНТНЫХ СИСТЕМ

© И.А. Седых

Ключевые слова: окрестностные мультиагентные системы.

Дано определение и приведен пример окрестностной мультиагентной системы.

Перспективной областью применения теории окрестностных систем является разработка окрестностных мультиагентных моделей [1]. В рамках одной окрестностной мультиагентной модели в качестве агентов могут присутствовать сети Петри, нейронные сети и другие дискретные модели, выполняющие различные функции и дополняющие друг друга.

Развивая введенное ранее в [2] обобщенное понятие окрестностной модели, определим окрестностную мультиагентную систему как набор $MNS_G = (N, X, V, Y, Z, G, F, X[0])$. В частных случаях для различных дискретных моделей отдельные составляющие окрестностной мультиагентной системы могут отсутствовать, в т. ч. и динамика.